

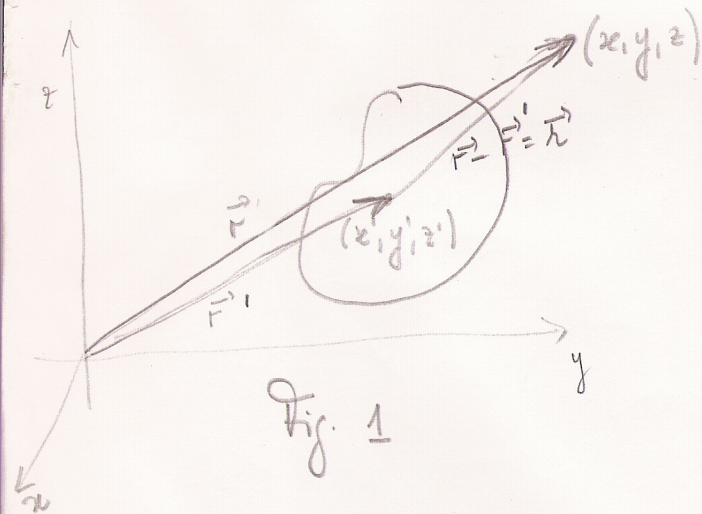
Aula 16

Griffiths <sup>1.</sup> pag. 221

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (1)$$

A lei de Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{r}}{r^2} dv'$$



$$\vec{r}' + \vec{r} = \vec{r}$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}'}$$

$$\vec{B} = \vec{B}(x, y, z)$$

$$\vec{J} = \vec{J}(x', y', z')$$

$$\vec{r} = (x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z} = \vec{r} - \vec{r}'$$

$$dv' = dx' dy' dz'$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[ \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{J}(\vec{r}) \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right) \right] d\tau'$$

lembra-se (principalmente os mesmos) que:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

então

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \vec{J}(\vec{r}) \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r})) - \vec{J}(\vec{r}) \cdot \left( \vec{\nabla} \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right)$$

mas

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{\hat{r}}{r^2} \right) = 0$$

Concluído!

$$\frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{(x-x')\hat{x}}{r^3} + \frac{(y-y')\hat{y}}{r^3} + \frac{(z-z')\hat{z}}{r^3} = \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\left| \frac{\hat{r}}{r^2} \right| = \frac{|\vec{r}|}{r^3} = \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \left[ (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{1/2}$$

Problema: prove que  $\vec{\nabla} \times r^n \hat{r} = 0$

Então

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Aplicando a regra do rotacional

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[ \vec{\nabla}_r \times \left( \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right) \right] d\tau'$$

$$\vec{\nabla}_r \times \left( \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right) =$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{A} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

$$\vec{\nabla} \times \left( \vec{J} \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \vec{J}(\vec{r}) \left( \vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \right) - \underbrace{\left( \vec{J} \cdot \vec{\nabla} \right) \frac{\hat{r}}{r^2}}_{\text{integral e' nula}}$$

Problema: provar que

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\hat{r}}{r^2} \right) = 4\pi \delta^3(\vec{r}) \quad (\text{ver apêndice})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}') 4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r}'$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{J}(\vec{r})}$$

$$\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}' \quad (3)$$

+ geral que expressa obtida

pela integral de linha. O último

termo

$$(-\vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{r} = (\vec{J} \cdot \vec{\nabla}') \frac{1}{r}$$

Componente x

$$\vec{J} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{x-x'}{r^3} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left[ \frac{(x-x')}{r^3} \vec{J} \right] - \frac{(x-x')}{r^3} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{\nabla} f$$

onde usamos

$$\vec{\nabla} \cdot (f \vec{A}) = f (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} f)$$

ou

$$\vec{A} \cdot (\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla} \cdot (f \vec{A}) - f (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

Agora como estamos com correntes

estacionárias

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0, \text{ então}$$

$$\left[ -(\vec{J} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\lambda}{\lambda^2} \right]_k = \vec{\nabla}' \cdot \left[ \frac{x-x'}{\lambda^3} \vec{J} \right]$$

então

$$\int_{V'} \vec{\nabla}' \cdot \left( \frac{x-x'}{\lambda^3} \vec{J} \right) dV' = \oint_S \underbrace{\frac{(x-x')}{\lambda^3} \vec{J} \cdot d\vec{a}'}_{\text{na superfície } \vec{J}=0}$$

## 2. Aplicações da Lei de Ampère

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

ou

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc.}$$

(Regra da mão direita !)

Síntese

{ Eletrostática: Coulomb  $\rightarrow$  Gauss

{ Magnetostática: Biot-Savart  $\rightarrow$  Ampère

Exemplo 1

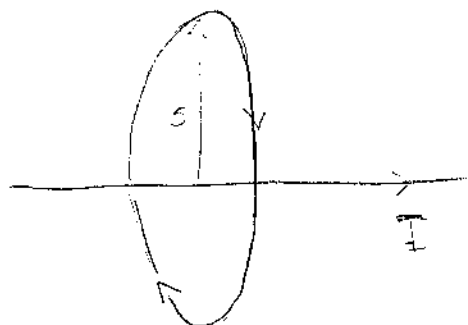


Fig. 1



8.

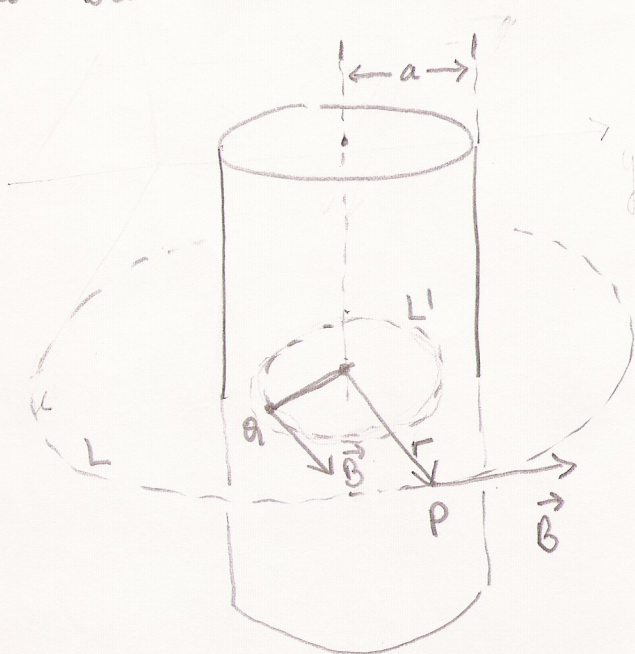
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint dl = B 2\pi r = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Exemplo 2

Corrente de superfície

Descrita o campo magnético produzido por uma corrente em um cilindro circular



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL = 2\pi r B$$

$$r > a$$

$$2\pi r B = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



$$14 \quad r < a$$

Se a corrente é <sup>uniformemente</sup> distribuída por toda a seção da condutora

$$I' = \frac{I}{\pi a^2} (\pi r^2) = I \left( \frac{r^2}{a^2} \right)$$

$$2\pi r B = \mu_0 I' \quad \rightarrow \quad B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I \left( \frac{r^2}{a^2} \right)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a^2} r$$

# Apendice sobre cálculo do divergente

de  $\hat{r}/r^2$

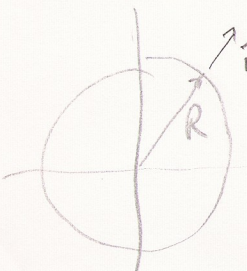
Seja  $\vec{v} = \frac{1}{r^2} \hat{r}$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{1}{r^2} \right) = 0$$

lembrando que se  $\vec{v} = v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} + v_\phi$

$$\text{e } \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

mas  $\oint \vec{v} \cdot d\vec{a} = \int \left( \frac{1}{R^2} \hat{r} \right) (R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r})$



$$= \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi$$

mas ainda mas

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) dV = \oint \vec{v} \cdot d\vec{a}$$



É verdade  $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 0$  exceto na origem!

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\hat{r}}{r^2} \right) = 4\pi \delta(\vec{r})$$

Em  $\delta(\vec{r})$  é a função delta de Dirac.

Em 1 dimensão propriedades

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ \infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

Podemos generalizar p/ 3 dimensões

$$\delta^3(\vec{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$$

Propriedades

$$\int_{\text{all space}} \delta^3(\vec{r}) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \delta(y) \delta(z) dx dy dz = 1$$

$$\int_{\text{all space}} f(\vec{r}) \delta^3(\vec{r}-\vec{a}) d\tau = f(\vec{a})$$

Então

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} = 4\pi \delta^3(\vec{r})$$

$$\text{Em geral} \quad \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\hat{r}}{r^2} \right) = 4\pi \delta^3(\vec{r})$$

$$r \equiv \vec{r} - \vec{r}_1$$

